Medalles Fields 2010

Elon Lindenstrauss, Universitat Hebrea de Jerusalem, Israel

For his results on measure rigidity in ergodic theory, and their applications to number theory.

Elon Lindenstrauss ha desenvolupat eines teòriques extraordinàriament potents en el camp de la teoria ergòdica, un camp de les matemàtiques desenvolupat inicialment per a comprendre la mecànica celeste. Després les ha usades, juntament amb el seu profund coneixement d'aquesta teoria, per a resoldre tota una sèrie de problemes oberts en àrees de les matemàtiques aparentment allunyades de la teoria ergòdica. Els seus mètodes s'espera que continuïn donant molt de fruit en les matemàtiques de les properes dècades.

La teoria ergòdica estudia els sistemes dinàmics, que són simplement normes matemàtiques per a descriure com evoluciona un sistema amb el temps. Així, per exemple, un sistema dinàmic pot descriure una bola de billar movent-se per una taula de billar sense fregament i sense forats. La bola viatjarà en línia recta fins que xoqui amb el costat de la taula, i en rebotarà com si es tractés d'un mirall. Si la taula és rectangular, aquest sistema dinàmic és força senzill i predictible, ja que una pilota enviada en qualsevol direcció acabarà rebotant en cadascun dels quatre costats amb un angle consistent. Però suposem que la taula de billar té extrems arrodonits, com un estadi. En aquest cas, una bola des de gairebé qualsevol posició inicial i dirigida a gairebé qualsevol direcció, passarà per tot l'estadi sencer amb els angles de rebot variant enormement. Els sistemes amb aquest tipus de comportament complex s'anomenen *ergòdics*.

La forma en què els matemàtics precisen aquest fet que les trajectòries es propaguin per tot l'espai és a través de la noció de la *invariància de mesura*. Una mesura pot ser considerada com una forma més flexible de calcular àrees, i tenir una mesura invariant assegura essencialment que si dues regions de l'espai d'alguna manera tenen àrees iguals, els punts viatjaran en el seu interior el mateix percentatge de temps. En canvi, a la taula rectangular (que per descomptat no és ergòdica), el centre rebrà molt poc trànsit en la majoria de les direccions.

En molts sistemes dinàmics, hi ha més d'una mesura invariant, és a dir, més d'una forma d'assignar àrees per les quals gairebé totes les trajectòries travessin àrees iguals amb igual freqüència. De fet, sovint hi ha infinites mesures invariants. El que Lindenstrauss va mostrar, però, és que en certes circumstàncies només pot haver-hi molt poques mesures invariants. Això resulta ser una eina molt potent, una mena de martell capaç de trencar problemes oberts força difícils.

I efectivament, Lindenstrauss a continuació maneja hàbilment el seu martell per a trencar alguns d'aquests problemes. Un exemple d'això el trobem en el camp de les *aproximacions diofàntiques*, que tracta de trobar nombres racionals útilment propers a certs nombres irracionals. π, per exemple, es pot aproximar bastant bé com a $\frac{22}{7}$. El nombre racional $\frac{179}{57}$ hi és una mica més a prop, però el seu denominador molt més gran el fa menys convenient que l'aproximació anterior. A principis del segle XIX, el matemàtic alemany Johann Dirichlet va proposar un estàndard per a jutjar la qualitat d'una aproximació: l'error d'una aproximació racional $\frac{p}{q}$ ha de ser inferior a $\frac{1}{q^2}$. A continuació va demostrar, amb una prova no gaire complicada, que hi ha un nombre infinit d'aproximacions a qualsevol nombre irracional que compleixin aquesta norma (és a dir, va demostrar que per a qualsevol nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, existeix un quantitat infinita d'enters p i q tals que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$).

Fa vuitanta anys, el matemàtic britànic John Edensor Littlewood va proposar un estàndard anàleg al de Dirichlet per a l'aproximació simultània de dos nombres irracionals: va pensar que hauria de ser sempre possible trobar aproximacions $\frac{p}{q}$ per a α i $\frac{r}{q}$ per a β de manera que el producte dels dos errors fos tan petit com es volgués (més precisament, l'afirmació fou que per a qualssevol nombres reals α i β i qualsevol $\epsilon > 0$, existiran aproximacions $\frac{p}{q}$ per a α i $\frac{r}{q}$ per a β tals que $|\alpha - \frac{p}{q}||\beta - \frac{r}{q}| < \frac{\epsilon}{q^3}$). Littlewood va donar el problema als seus estudiants de postgrau, pensant que no hauria de ser gaire més difícil que la prova de Dirichlet. Però la conjectura de Littlewood resultà ser extraordinàriament

difícil i, fins fa poc, no hi ha hagut progressos substancials.

Bé, doncs, Lindenstrauss ha aplicat les seves eines de teoria ergòdica al problema, en un treball conjunt amb Manfred Einsiedler i Anatole Katok. La teoria ergòdica pot semblar una elecció estranya per a un problema que no involucra sistemes dinàmics ni temps, però aquests estranys aparellaments són de vegades els més potents. Heus aquí una manera de reformular el problema de Littlewood per a poder entreveure una connexió amb l'aproximació diofàntica. En primer lloc imaginem un quadrat unitat, i identifiquem la vora superior amb la vora inferior per obtenir un cilindre. Ara enganxem la vora dreta amb la vora esquerra i obtindrem una forma geomètrica anomenada *tor*, que s'assembla a un donut. Es pot enrotllar tot el pla coordenat sobre el tor enganxant un punt (x, y) al punt del quadrat unitat que té com a coordenades les parts fraccionàries de x i de y. Aquest tor és l'espai del nostre sistema dinàmic. A continuació, definim una transformació mitjançant $(x, y) \mapsto (x+\alpha, y+\beta)$. Si α i β són irracionals (o més precisament, no racionalment relacionats), aquest sistema dinàmic és ergòdic. La conjectura de Littlewood es converteix en l'afirmació que aquestes trajectòries passen arbitràriament a prop de l'origen, després d'aplicar la transformació una quantitat suficient de vegades. El nombre de vegades que hom aplica la transformació és precisament el denominador de les fraccions que aproximen α i β.

Usant una nova formulació de la conjectura de Littlewood en termes d'un sistema dinàmic més complex, Lindenstrauss i els seus col·laboradors han fet un gran avenç en la conjectura: demostren que si hi ha parells de números per als quals la conjectura és falsa, n'hi ha només molt pocs, una porció negligible de tots ells.

Un altre exemple del poder de les tècniques de Lindenstrauss és la seva prova del primer cas no trivial de la conjectura d'unicitat ergòdica de l'aritmètica quàntica. Els sistemes ergòdics apareixen amb certa freqüència en la física, ja que tan bon punt tenim tres cossos que interactuen, per exemple, el sistema comença a comportar-se d'una manera una mica ergòdica. Però si aquestes interaccions tenen lloc a escala quàntica, no es poden descriure amb les eines ordinàries de la teoria ergòdica, perquè la teoria quàntica no permet camins ben definits per a punts en posicions ben definides, sinó que només es pot considerar la probabilitat que un cos estigui en una posició particular en un moment determinat. L'anàlisi matemàtica d'aquests sistemes és extraordinàriament difícil, i els físics s'han de basar, de moment, només en simulacions numèriques, sense un suport matemàtic ferm.

La conjectura d'unicitat ergòdica quàntica diu, més o menys, que si es calcula l'àrea usant la mesura que és natural en dinàmica clàssica llavors, a mesura que l'energia del sistema augmenta, aquesta distribució de probabilitats esdevé més i més uniforme en l'espai. A més, aquesta mesura és l'única per la qual això és cert. Lindenstrauss va ser capaç de demostrar això en un context aritmètic per a determinats tipus de sistemes dinàmics, tot establint un dels primers grans avenços rigorosos en la teoria del caos quàntic.

Aquests són només dos exemples dels resultats notables de Lindenstrauss. Els seus mètodes, eines i punts de vista molt possiblement donaran molts més resultats en els propers anys.

Julie Rehmeyer